4) a) Δ: y=x

pour $x \geq 1$ on a :

$x^2-1 \leq x^2 \Rightarrow x^2-1 \leq x^4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2-1} \leq \sqrt[4]{x^4}$

$\Rightarrow f(x) \leq x$

d'où (ζ_f) est au dessous de Δ pour $x \geq 1$

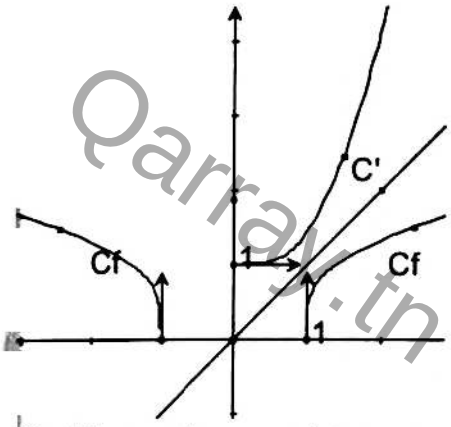
b) f est paire

(ζ_1) : la courbe de la restriction de f sur $[1,+\infty[$

$(\zeta_2) = S_{(O,\vec{i})}(\zeta_1)$

$(\zeta_f) = (\zeta_1) \cup (\zeta_2)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (ζ_f) admet un B.P de direction $(O,\vec{i})$



5) a/ f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur

$f([1,+\infty[) = \left[f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f\right[= [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$

b) * f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{2x}{4(\sqrt[4]{x^2-1})^3} \neq 0$

d'où f^1 est dérivable sur $f(]1,+\infty[) = \mathbb{R}_+^*$

* f n'est pas dérivable à droite en 1

d'où (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $1 \Rightarrow (\zeta_{f^{-1}})$ admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse f(1)=0

d'où f^1 est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'_d(0)=0$

conclusion: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

c) $(\zeta')=S_\Delta(\zeta_1)$

EX 23 :

$D_f = \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{3} + 3$

1) a) pour x>0

$\sqrt[3]{x} = \dfrac{x.\sqrt[3]{x}}{x} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \dfrac{x}{(\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d'où $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{x}{3} + 3 = x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3$

b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3 = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + \dfrac{1}{3}x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} + 3 = +\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite D: $y = \dfrac{-1}{3}x$ au voisinage $(+\infty)$

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 + \dfrac{3}{x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

b) • la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• la fonction : $x \mapsto \dfrac{-x}{3} + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \ ; (x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow x = 1$

• $x>1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}>1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}<1 \Rightarrow f'(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	|	+	0	-	
g(x)		↗	$\frac{11}{3}$	↘	$-\infty$
	3				

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn